Roll No. ....

D–3649

B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Second

(Differential Equations)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) रैखिक अवकल समीकरण $4xy'' + 2y' + y = 0$ का श्रेणी हल ज्ञात कीजिए।

Find the series solution of the linear differential equation $4xy'' + 2y' + y = 0$.

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Prove that :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

(स) निम्नलिखित स्टर्म-ल्यूविल समस्या के सभी आइगेन मानों एवं आइगेन फलनों को ज्ञात कीजिए :

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{— (A)}$$

$$y(0) = 0,\ y(l) = 0 \quad \text{— (B)}$$

Find all the eigen values and eigen functions of the following Sturm-Liouville problem :

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{— (A)}$$

$$y(0) = 0,\ y(l) = 0 \quad \text{— (B)}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) दर्शाइये कि :

$$L\{\sinh at \sin at\} = \frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$$

Show that :

$$L\{\sinh at \sin at\} = \frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$$

(ब) $L^{-1}\left\{\frac{2p-1}{p^2 - 2p + 10}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate :

$$L^{-1}\left\{\frac{2p-1}{p^2 - 2p + 10}\right\}$$

(स) लाप्लास रूपांतर विधि का प्रयोग कर हल कीजिए :

$$(D^2 - D - 2)\,y = 20 \sin 2t$$

$$y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

Solve by Laplace transform method :

$$(D^2 - D - 2)\,y = 20 \sin 2t$$

$$y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3\. (अ) हल कीजिए :

$$x(y^2+z)\,p - y(x^2+z)\,q = z(x^2-y^2)$$

Solve :

$$x(y^2+z)\,p - y(x^2+z)\,q = z(x^2-y^2)$$

(ब) पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

$$x^2p^2 + y^2q^2 = z^2$$

Find the complete integral of :

$$x^2p^2 + y^2q^2 = z^2.$$

(स) चारपिट विधि से पूर्ण हल कीजिए :

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

Solve by Charpit's method :

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4\. (अ) मोन्जे विधि से हल कीजिए :

$$r = a^2 t$$

Solve by Monge's method :

$$r = a^2 t$$

(ब) समीकरण :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$$

का वर्गीकरण कीजिए।

Classify the equation :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$$

(स) अवकल समीकरण :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cos mx \sin ny$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cos mx \sin ny$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5\. (अ) निम्नलिखित वक्रों की निकटता का अन्वेषण (सामीप्य विवेचना) कीजिए :

(i) $y(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}, \; y_1(x) = 0$ on $[0, \pi]$

(ii) $y(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}, \; y_1(x) = 0$ on $[0, \pi]$

Investigate the closeness of the following curves :

(i) $y(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}, \; y_1(x) = 0$ on $[0, \pi]$

(ii) $y(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}, \; y_1(x) = 0$ on $[0, \pi]$

(ब) फलनक :

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx$$

$$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1$$

का चरम मान (उच्चिष्ठ) परीक्षण कीजिए।

Test for extremum the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx\,,$$

$$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1$$

(स) फलनक :

$$I[y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2)\, dx$$

के चरम ज्ञात करने की समस्या में निर्देशांक रूपांतरण के अन्तर्गत आयलर समीकरण की निश्चितता का सत्यापन कीजिए।

Verify invariance of Euler's equation under co-ordinates transformation in the problem of finding the externals of the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2)\, dx$$