Roll No. ....

E–3769

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) माना कि G एक समूह है तथा T, G का स्वकारिता है। यदि $N(a) = \{x \in G; xa = ax\}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$N(T(a)) = T(N(a)) \quad \forall a \in G$$

Let G be a group and T an automorphism of G. If for $a \in G$, $N(a) = \{x \in G; xa = ax\}$, prove that :

$$N(T(a)) = T(N(a))$$

(ब) परिमित समूह G का वर्ग समीकरण लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the class equation of any finite group G.

(स) मान लो G कोटि 108 का एक समूह है। दर्शाइये कि कोटि 27 या 9 के एक प्रसामान्य उपसमूह का अस्तित्व होता है।

Let G be a group of order 108. Show that there exists a normal subgroup of order 27 or 9.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) किसी वलय R की दो गुणजावलियों S और T का संघ R का एक गुणजावली होता है यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$ ।

For two ideals S and T of any ring R, S ∪ T is an ideal of R iff either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

(ब) अवशेष वर्ग माड्यूलो 5 के क्षेत्र पर निम्न बहुपद :

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 4$$

तथा $$g(x) = 3x^6 + 4x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 4$$

का महत्तम उभयनिष्ठ भाजक ज्ञात कीजिए।

Find the g. c. d. of :

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 4$$

and $$g(x) = 3x^6 + 4x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 4$$

under modulo 5.

(स) R-मॉड्यूल M को इसके उपमॉड्यूल N_1 तथा N_2 का सरल योग होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि :

(i) $M = N_1 + N_2$

(ii) $N_1 \cap N_2 = \{0\}$

The necessary and sufficient condition for an R-module M to be a direct sum of its two sub-modules N_1 and N_2 are that :

(i) $M = N_1 + N_2$

(ii) $N_1 \cap N_2 = \{0\}$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सदिश समष्टि V(F) का अरिक्त उपसमुच्चय W सदिश उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि :

$$a, b \in F, \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$$

The non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace iff :

$$a, b \in F, \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W.$$

(ब) सदिश समष्टि के लिये बिमा प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove dimension theorem for vector space.

(स) जाँच कीजिए कि दिया गया सदिश $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ समुच्चय, IR^3 का आधार बनाता है या नहीं।

Determine whether the following vectors form a basis of IR^3 or not :

$$\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}.$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) $V_3(IR)$ पर रैखिक रूपान्तरण T, जो :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, x_2 - 2x_1, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

द्वारा परिभाषित है, का आधार $\{(1,0,1),(-1,2,1),(2,1,1)\}$ के सापेक्ष आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let T be the linear operator on IR^3 defined by :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, x_2 - 2x_1, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

What is the matrix of T in the ordered basis $\{(1,0,1),(-1,2,1),(2,1,1)\}$?

(ब) जाति-शून्यता प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Rank-nullity theorem.

(स) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह A एक विकर्णीय आव्यूह है, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Show that the following matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) कौशी-श्वार्ज असमिका लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy-Schwarz inequality.

(ब) यदि α और β किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं, तब सिद्ध कीजिए :

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

तथा परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

If α and β are vectors in an inner product space $V(F)$, prove that :

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

Interpret the result geometrically.

(स) आधार समुच्चय $\{1, x, x^2, x^3\}$ से शुरुआत करके $P_3[-1, 1]$ का एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार ज्ञात कीजिए, जबकि आन्तर गुणन की परिभाषा निम्न है :

$$< p, q > = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

जहाँ $p(x)$ तथा $q(x)$, $P_3[-1, 1]$ के स्वेच्छ बहुपद हैं।

Find an orthonormal basis of $P_3[-1, 1]$ starting from the basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Use the inner product defined by :

$$< p, q > = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

where $p(x)$ and $q(x)$ are arbitrary polynomials of $P_3[-1, 1]$.